

תרגיל בית 4 - התמרת לפלס

1. (א) חשבו התמרת לפלס של $f(t) = 3 \cosh t - 4 \sinh 5t$.

(ב) חשבו התמרת לפלס של $f(t) = \cos t \cdot \cosh t$.

(ג) חשבו התמרת לפלס הפוכה של $F(s) = \frac{s-1}{(s+3)(s^2+2s+2)}$.

(ד) חשבו התמרת לפלס הפוכה של $F(s) = \frac{2s-1}{s^3-s}$.

2. (א) חשבו בעזרת התמרת לפלס את: $\int_0^\infty \frac{e^{-t} \sin t}{t} dt$.

רמז: אפשר להעזר בתרגיל 4.

(ב) פתרו:

$$\begin{cases} f'(t) + 5 \int_0^t f(u) \cos 2(t-u) du = 10 \\ f(0) = 2 \end{cases}$$

3.

$$\begin{cases} y''(t) - 2y'(t) + y(t) = (-1)^{[t]} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \quad (i) \text{ פתרו את המשוואה הדיפרנציאלית:}$$

כאשר, לכל $t \in \mathbb{R}$, $[t]$ מסמן את המספר השלם n כך ש- $n \leq t < n+1$.

$$(ii) \text{ פתרו את המערכת של משוואות דיפרנציאליות:} \begin{cases} x'(t) + 2x(t) - 4y(t) = f(t) \\ y'(t) + x(t) - 2y(t) = 0 \end{cases}$$

$$f(t) = \begin{cases} t & ; 0 \leq t \leq 1 \\ 1 & ; 1 \leq t \leq 2 \\ t-1 & ; 2 < t < \infty \end{cases} \quad \text{כאשר נתון ש- } x(0) = y(0) = 0$$

4. תהי $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ פונקציה רציפה למקוטעין כך ש- $|f(t)| \leq Kte^{at}$ עבור כל $t \in [0, \infty)$, כאשר K ו- a הם קבועים ממשיים.

(א) הוכיחו כי התמרת לפלס $F(s)$ של f קיימת עבור כל s ממשי בקטע (a, ∞) .

(ב) בעזרת החלפת סדר באינטגרל נשנה (משפט Fubini) מצאו נוסחא עבור $\int_u^v F(s) ds$ לכל u ו- v כך ש- $a < u < v < \infty$.

(ג) ע"י החלפת סדר הפעולות של אינטגרציה ומעבר לגבול (לפי משפט ההתכנסות הנשלטת של Lebesgue, משפט 3.2 בעמוד 96 של ספר הלימוד) הראו כי האינטגרל $\int_u^\infty F(s) ds$ קיים עבור כל $u > a$. כמו-כן הראו כי אינטגרל זה שווה ל- $G(u)$ כאשר G היא התמרת לפלס של הפונקציה $\frac{1}{t}f(t)$.

(ד) מה הנגזרת של G ?